

제 2 교시

수리 영역

나 형

성명

수험 번호

홀수형

- 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

1. $9^{\frac{3}{2}} \times 27^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ $\sqrt{3}$ ④ 3 ⑤ $3\sqrt{3}$

2. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $(A+B)A$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 함수 $y = 3 + \log_3(x^2 - 4x + 31)$ 의 최솟값은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

5. 네 수 1, a , b , c 는 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$ 를 만족시킨다. 공비 r 의 값은? (단, $r > 1$) [3점]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

6. $a = \log_2 10$, $b = 2\sqrt{2}$ 일 때, $a \log b$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

7. 두 지수함수 $f(x) = a^{bx-1}$, $g(x) = a^{1-bx}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이다.
 (나) $f(4) + g(4) = \frac{5}{2}$

두 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은? (단, $0 < a < 1$) [3점]

- ① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

8. 세계핸드볼연맹에서 공인한 여자 일반부용 핸드볼 공을 생산하는 회사가 있다. 이 회사에서 생산된 핸드볼 공의 무게는 평균 350g, 표준편차 16g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사는 일정한 기간 동안 생산된 핸드볼 공 중에서 임의로 추출된 핸드볼 공 64개의 무게의 평균이 346g 이하이거나 355g 이상이면 생산 공정에 문제가 있다고 판단한다. 이 회사에서 생산 공정에 문제가 있다고 판단할 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
2.00	0.4772
2.25	0.4878
2.50	0.4938
2.75	0.4970

- ① 0.0290 ② 0.0258 ③ 0.0184
 ④ 0.0152 ⑤ 0.0092

9. $(x + \frac{1}{x^3})^4$ 의 전개식에서 $\frac{1}{x^4}$ 의 계수는? [4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

10. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ (n+1)(n+2)a_{n+1} = n^2 a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

일 때, 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{n}{n+1} \quad \dots\dots (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$ 일 때, (좌변) $= \frac{1}{2}$, (우변) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이므로 (*)이 성립한다.

(2) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1}$$

이다. $n=m+1$ 일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + a_{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \boxed{\text{(가)}} a_m \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} \\ &\quad + \frac{m^2}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{(m-1)^2}{m(m+1)} \cdot \dots \cdot \frac{1^2}{2 \cdot 3} a_1 \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \boxed{\text{(나)}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} - \boxed{\text{(다)}} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} - \frac{m+1}{m+2} \end{aligned}$$

그러므로 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [3점]

- | | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| | (가) | (나) | (다) |
| ① | $\frac{m}{(m+1)(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$ |
| ② | $\frac{m}{(m+1)(m+2)}$ | $\frac{m}{(m+1)^2(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)(m+2)}$ |
| ③ | $\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$ |
| ④ | $\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)(m+2)}$ |
| ⑤ | $\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$ | $\frac{m}{(m+1)^2(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$ |

11. $0 < a < \frac{1}{2}$ 인 상수 a 에 대하여

직선 $y=x$ 가 곡선 $y=\log_a x$ 와 만나는 점을 (p, p) ,
 직선 $y=x$ 가 곡선 $y=\log_{2a} x$ 와 만나는 점을 (q, q)
 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p = \frac{1}{2}$ 이면 $a = \frac{1}{4}$ 이다.

ㄴ. $p < q$

ㄷ. $a^{p+q} = \frac{pq}{2^a}$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 집합 U 를

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \text{는 } 1 \text{이 아닌 양수} \right\}$$

라 하자. U 의 부분집합 S 를

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \log_a d = \log_b c, a \neq b, bc \neq 1 \right\}$$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 이면 $A \in S$ 이다.

ㄴ. $A \in U$ 이고 A 가 역행렬을 가지면 $A \in S$ 이다.

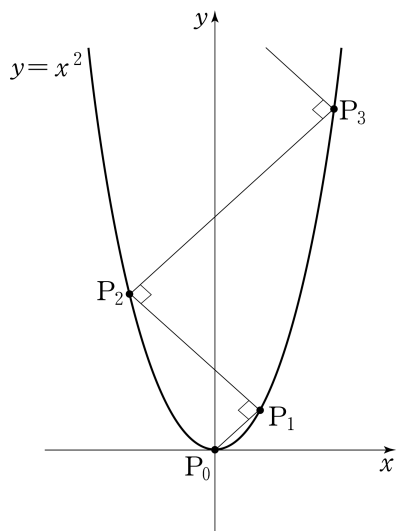
ㄷ. $A \in S$ 이면 A 는 역행렬을 가진다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 자연수 n 에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n 이 함수 $y=x^2$ 의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1} 을 다음 규칙에 따라 정한다.

- (가) 두 점 P_0, P_1 의 좌표는 각각 $(0, 0), (1, 1)$ 이다.
- (나) 점 P_{n+1} 은 점 P_n 을 지나고 직선 $P_{n-1}P_n$ 에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$ 의 그래프의 교점이다.
(단, P_n 과 P_{n+1} 은 서로 다른 점이다.)

$l_n = \overline{P_{n-1}P_n}$ 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{n}$ 의 값은? [3점]



- ① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

14. 좌표평면에 원 $C_1: (x-4)^2 + y^2 = 1$ 이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1 에 기울기가 양수인 접선 l 을 그었을 때 생기는 접점을 P_1 이라 하자.

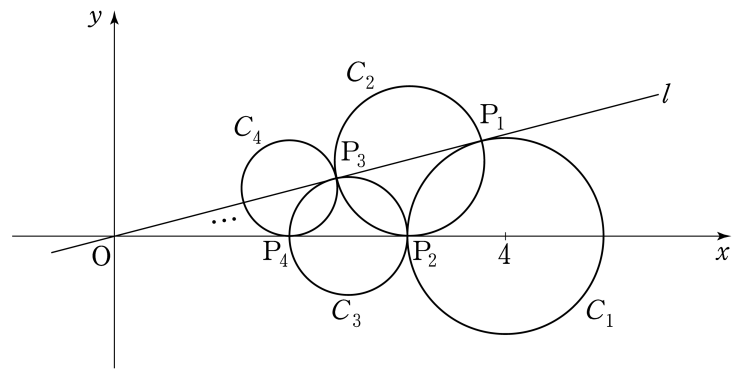
중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1 을 지나며 x 축에 접하는 원을 C_2 라 하고 이 원과 x 축의 접점을 P_2 라 하자.

중심이 x 축 위에 있고 점 P_2 를 지나며 직선 l 에 접하는 원을 C_3 이라 하고 이 원과 직선 l 의 접점을 P_3 이라 하자.

중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3 을 지나며 x 축에 접하는 원을 C_4 라 하고 이 원과 x 축의 접점을 P_4 라 하자.

이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n 의 넓이를 S_n 이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? (단, 원 C_{n+1} 의 반지름의 길이는 원 C_n 의 반지름의 길이보다 작다.) [4점]



- ① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

15. 어떤 사회복지센터에서는 다음과 같은 4가지 봉사활동 프로그램을 매일 운영하고 있다.

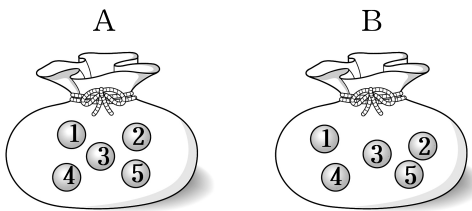
프로그램	A	B	C	D
봉사활동 시간	1시간	2시간	3시간	4시간

철수는 이 사회복지센터에서 5일간 매일 하나씩의 프로그램에 참여하여 다섯 번의 봉사활동 시간 합계가 8시간이 되도록 아래와 같은 봉사활동 계획서를 작성하려고 한다. 작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는? [4점]

봉사활동 계획서		
성명 :		
참여일	참여 프로그램	봉사활동 시간
2009.1.5		
2009.1.6		
2009.1.7		
2009.1.8		
2009.1.9		
봉사활동 시간 합계		8시간

- ① 47 ② 44 ③ 41 ④ 38 ⑤ 35

16. 주머니 A와 B에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 다섯 개의 구슬이 각각 들어 있다. 철수는 주머니 A에서, 영희는 주머니 B에서 각자 구슬을 임의로 한 개씩 꺼내어 두 구슬에 적혀 있는 숫자를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 반복할 때, 첫 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 서로 다르고, 두 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 같을 확률은? [4점]



- ① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$

17. 정보이론에서는 사건 E 가 발생했을 때, 사건 E 의 정보량 $I(E)$ 가 다음과 같이 정의된다고 한다.

$$I(E) = -\log_2 P(E)$$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 사건 E 가 일어날 확률 $P(E)$ 는 양수이고, 정보량의 단위는 비트이다.)

[4점]

<보 기>

ㄱ. 한 개의 주사위를 던져 홀수의 눈이 나오는 사건을 E 라 하면 $I(E)=1$ 이다.

ㄴ. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고 $P(A \cap B) > 0$ 이면 $I(A \cap B) = I(A) + I(B)$ 이다.

ㄷ. $P(A) > 0, P(B) > 0$ 인 두 사건 A, B 에 대하여 $2I(A \cup B) \leq I(A) + I(B)$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

18. 지수함수 $y=5^{x-1}$ 의 그래프가 두 점 $(a, 5)$, $(3, b)$ 를 지날 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_5 + a_9 = 45$$

일 때, $a_1 + a_{10}$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 공비가 같은 두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$a_1 - b_1 = 1 \text{ 이고 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 8, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 6 \text{ 일 때,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{의 값을 구하시오. [3점]}$$

21. $1 < a < b$ 인 두 실수 a, b 에 대하여

$$\frac{3a}{\log_a b} = \frac{b}{2\log_b a} = \frac{3a+b}{3}$$

가 성립할 때, $10 \log_a b$ 의 값을 구하시오. [3점]

22. 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수를 차례로 m, n 이라 하자. $i^m \cdot (-i)^n$ 의 값이 1이 될 확률이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고 p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

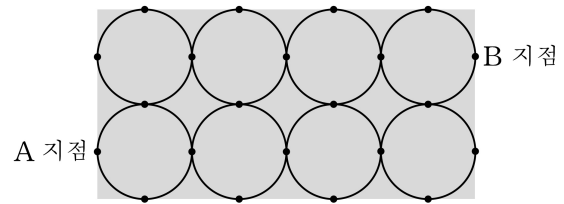
23. 자연수 $n(n \geq 2)$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n 이라 하자. 예를 들어 4로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 5, 10, 15이므로 $a_4 = 5 + 10 + 15 = 30$ 이다. $a_n > 500$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. [4점]

24. 이차정사각행렬 A 는 모든 성분의 합이 0이고

$$A^2 + A^3 = -3A - 3E$$

를 만족시킨다. 행렬 $A^4 + A^5$ 의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

25. 직사각형 모양의 잔디밭에 산책로가 만들어져 있다. 이 산책로는 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 원 8개가 서로 외접하고 있는 형태이다.



A 지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수를 구하시오. (단, 원 위에 표시된 점은 원과 직사각형 또는 원과 원의 접점을 나타낸다.) [4점]

5지선다형

26. 두 사건 A, B 에 대하여 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B^C) = \frac{2}{3}$ 이며 $P(B|A) = \frac{1}{6}$ 일 때, $P(A^C|B)$ 의 값은? (단, A^C 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{7}{12}$
- ③ $\frac{2}{3}$
- ④ $\frac{3}{4}$
- ⑤ $\frac{5}{6}$

27. 자연수 n 에 대하여 $\log n$ 의 가수를 $f(n)$ 이라 할 때, 집합

$$A = \{f(n) \mid 1 \leq n \leq 150, n \text{은 자연수}\}$$

의 원소의 개수는? [3점]

- ① 131 ② 133 ③ 135 ④ 137 ⑤ 139

28. 단위행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) A, B 는 모두 역행렬을 가진다.

(나) $BAB = E, ABA = A^{-1}$

$A^n = E$ 가 성립하는 자연수 n 의 최솟값은? (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

29. 다음은 어떤 모집단의 확률분포표이다.

X	10	20	30	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{2} - a$	1

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 복원추출하여 구한 표본평균을 \bar{X} 라 하자. \bar{X} 의 평균이 18일 때, $P(\bar{X} = 20)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{19}{50}$ ③ $\frac{9}{25}$ ④ $\frac{17}{50}$ ⑤ $\frac{8}{25}$

단답형

30. 두 주사위 A, B 를 동시에 던질 때, 나오는 각각의 눈의 수

m, n 에 대하여 $m^2 + n^2 \leq 25$ 가 되는 사건을 E 라 하자.

두 주사위 A, B 를 동시에 던지는 12회의 독립시행에서 사건 E 가 일어나는 횟수를 확률변수 X 라 할 때, X 의 분산 $V(X)$ 는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.